文章编号:1000-4939(2022)05-0845-14





李建春,女,博士,东南大学首席教授、博士生导师,国家杰出青年科学基金获得者、江苏省双创人才以及江苏省双创团队负责人。现任《Geomechanics and Geophysics for Geo-Energy and Geo-Resource》联合主编、《Rock Mechanics and Rock Engineering》副主编,同时担任国际岩石力学与岩石工程学会(ISRM)岩石动力学专委会主席。

长期致力于岩石动力学应用基础研究,开展了应力波通过岩石节理的连续-非连续理论方法研究,提出了应力波通过节理的二维时域递归分析方法,建立了充填节理的薄弱层界面模型和岩体黏弹性动态等效连续介质模型,揭示了应力波在岩体中传播规律。近年来,作为负责人主持国家杰出青年科学基金项目、国家自然科学基金重点项目和重点国际合作项目、国家重点研发专项课题。在国内外权威期刊发表论文 100 余篇,其中 SCI 收录论文 80 余篇,出版英文专著 2 部、中文专著 1 部、参编英文专著 2 部。

岩体中应力波传播规律研究方法进展

李建春[1],范立峰[2],李郑梁[1]

(1. 东南大学爆炸安全防护教育部工程研究中心和未来地下空间研究院,211189 南京;
2. 北京工业大学建筑与土木工程学院,100124 北京)

摘　要:应力波在岩体中传播规律的研究是分析工程岩体动力稳定性的基础。天然岩体中包含的大量节理对应力波的传播规律具有显著的影响。应力波在岩体中传播时会出现幅值的衰减以及波速的降低,在此过程中,节理在应力波的作用下会出现张开、闭合和滑移变形。目前,应力波在岩体中的一维和二维传播规律分析方法比较成熟,这些方法主要分为非连续介质方法与动态等效连续介质方法以及双尺度非连续耦合方法。借助这些方法,研究者们开展了线性和非线性节理对应力波传播规律影响的研究。本综述将详细地总结上述 3 种方法,探讨它们的优缺点,并提出值得进一步研究的问题。

关键词:岩体;应力波;节理;位移不连续方法;等效介质方法

中图分类号:P511.2　　**文献标志码:**A　　**DOI:**10.11776/j.issn.1000-4939.2022.05.005

收稿日期:2022-07-05　　修回日期:2022-08-17

基金项目:国家自然科学基金重点资助项目(No.41831281;42220104007);中央高校基本科研业务费资助项目(No.2242022k30054)

通信作者:李建春,教授。E-mail: jcli@seu.edu.cn

引用格式:李建春,范立峰,李郑梁.岩体中应力波传播规律研究方法进展[J].应用力学学报,2022,39(5):845-858.

LI Jianchun,FAN Lifeng,LI Zhengliang. Progress of methods for wave propagation across rock masses[J]. Chinese journal of applied mechanics,2022,39(5):845-858.

Progress of methods for wave propagation across rock masses

LI Jianchun[1], FAN Lifeng[2], LI Zhengliang[1]

(1. Engineering Research Center of Safety and Protection of Explosion & Impact of Ministry of Education, Institute of Future Underground Space, Southeast university, 211189 Nanjing, China;
2. College of Architecture and Civil Engineering, Beijing University of Technology, 100124 Beijing, China)

Abstract: Studying stress wave propagation across jointed rock masses is essential for the stability of rock engineering. Rock masses in nature include many joints, which have great influence on stress wave propagation. During wave propagation across rock masses, both of the amplitude and speed of the wave attenuate. Meanwhile, the interaction between the stress wave and the joints usually results the joints open, close and slippery. Currently, some analytical methods have been successfully applied-for studying one-dimensional or two-dimensional wave propagation across rock joints. These analytical methods are divided into three types: the discontinuous medium method, the equivalent continuous medium methods and double-scale discontinuous method. Based on these two methods, the effect of linear and nonlinear joints on wave propagation has been studied effectively. The present paper is to introduce the discontinuous and equivalent continuous media methods, discuss their applicability, and suggest the further problems to study.

Key words: rock mass; stress wave; joints; displacement discontinuity method; equivalent continuous medium method

岩体中应力波传播规律的研究是目前国内外研究的热点问题之一，也是岩石力学的难点问题，该研究结果对分析和评估动态扰动下岩土工程的安全稳定有重要意义。例如，爆破引起的振动通常以应力波的形式在岩体中传播，并对周围环境造成影响。对振动的预测与控制是确保爆破工程顺利开展的基础。研究应力波在岩体中传播规律可以为爆破振动的准确预测提供理论依据。因此深入理解和研究应力波在岩体中的传播规律意义重大。

由于岩体中大量节理的存在，应力波在传播过程中频率和幅值都会发生衰减。应力波在节理处的反射、折射和散射是其衰减的重要因素[1-2]。不同尺度的结构面对应力波传播规律具有不同的作用机制[3]。为此，国内外学者主要针对岩石中的裂缝和岩体中的节理开展了理论分析，得到应力波通过岩石或岩体时发生的衰减和频散[4-14]。岩体中包含很多类型的不连续结构面，按其尺度可分为五级，其中 III 级和 IV 级结构面为呈现不同延伸性的节理，在岩质隧道、边坡和基础工程中广泛存在，影响着岩体结构完整性和物理力学性质[15]。从工程角度来说，节理对应力波传播规律的影响不容忽视。现有的理论分析方法主要分为两大类，即非连续介质方法与动态等效连续介质方法。这些方法都有各自的优点和局限性。因此，有必要对现有的方法进行详细地综述，发现它们的适用范围，从而为将来进一步的研究提供指导。

1 非连续介质分析方法

非连续介质方法是分析应力波在岩体中传播规律的有效方法之一。其代表方法是位移不连续方法，该方法将节理视为黏结（节理面的位移连续且作用在节理前后的应力连续）、不完全黏结（节理面的位移不连续但作用在节理前后的应力连续）或完全张开（位移不连续但作用在节理上应力为零）的边界条件。该方法可用于分析应力波垂直或者以任意角度斜入射单条或一组节理。

1.1 应力波通过单条节理的传播

Ⅲ级岩体中包含着大量的区域性节理，这类结构面的特征尺寸相较于波长具有延伸好但厚度薄的特点。在假设节理为无限延伸的情况下，现有的研究对应力波通过单条节理开展了大量的研究。Schoenberg[16]将节理视为应力连续、位移不连续的线性滑移界面，计算了简谐波以任意角度入射节理时的透射和反射系数。当任意压缩波（P 波）入射在介质 1 和 2 之间的界面时，应力波会发生透射和反射（图 1）。

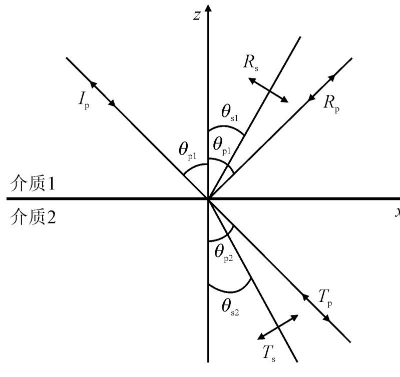


图 1　平面简谐 P 波在介质 1 和 2 之间非连续界面上的透射和反射

Fig. 1　Reflection and transmission of a plane harmonic P wave on the interface between media 1 and 2

如果该界面为节理，具有一定的法向和切向刚度，根据位移不连续假设，作用在节理上的应力连续但是节理前后的位移不连续，即[16]

$$\begin{cases} \sigma_{z1} = \sigma_{z2} = \sigma_z \\ \tau_{xz1} = \tau_{xz2} = \tau_{xz} \\ u_{z1} - u_{z2} = \sigma_z / k_z \\ u_{x1} - u_{x2} = \tau_{xy} / k_x \end{cases} \tag{1}$$

其中：σ_z 为作用在节理上的法向应力；下标 1 和 2 对应介质 1 和 2；τ_{xz} 为作用在节理上的切向应力；u_x 和 u_z 表示 x 和 z 向位移；k_x 和 k_z 为节理的切向和法向刚度。将入射波、反射波和透射波引起的位移、应力代入式(1)可得到关于透射和反射系数的矩阵方程[16]为

$$\begin{bmatrix} -k_z\cos\theta_{p1} & k_z\sin\theta_{s1} & -k_z\cos\theta_{p2} + \mathrm{i}\omega z_{p2}\cos2\theta_{s2} & k_z\sin\theta_{s2} - \mathrm{i}\omega z_{s2}\sin2\theta_{s2} \\ -k_x\sin\theta_{p1} & -k_x\cos\theta_{s1} & k_x\sin\theta_{p2} - \mathrm{i}\omega\dfrac{z_{s2}^2}{z_{p2}}\sin2\theta_{p2} & k_x\cos\theta_{s2} - \mathrm{i}\omega z_{s2}\cos2\theta_{s2} \\ -z_{p1}\cos2\theta_{s1} & z_{s1}\sin2\theta_{s1} & z_{p2}\cos2\theta_{s2} & -z_{s2}\sin2\theta_{s2} \\ \dfrac{z_{s1}^2}{z_{p1}}\sin2\theta_{p1} & z_{s1}\cos2\theta_{s1} & \dfrac{z_{s2}^2}{z_{p2}}\sin2\theta_{p2} & z_{s2}\cos2\theta_{s2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_p \\ R_s \\ T_p \\ T_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_z\cos\theta_{p1} \\ k_x\sin\theta_{p1} \\ z_{p1}\cos2\theta_{s1} \\ \dfrac{z_{s1}^2}{z_{p1}}\sin2\theta_{p1} \end{bmatrix} \tag{2}$$

其中：R_p、R_s、T_p 和 T_s 表示反射系数和透射系数，即 P 波和 S 波的反射波与透射波幅值与入射波幅值之比；$z_{p(s)1}$ 为 P 波(剪切 S 波)在介质 1 中的波阻抗，$z_{p(s)1} = \rho_1 c_{p(s)1}$；$\rho_1$ 为介质 1 的密度；$c_{p(s)1}$ 为 P 波(剪切 S 波)在介质 1 中的波速；P 波和 S 波的传播方向，θ_{p1}、θ_{s1}、θ_{p2} 和 θ_{s2}，满足 Snell 定律，即

$$\frac{\sin\theta_{p1}}{c_{p1}} = \frac{\sin\theta_{s1}}{c_{s1}} = \frac{\sin\theta_{p2}}{c_{p2}} = \frac{\sin\theta_{s2}}{c_{s2}} \tag{3}$$

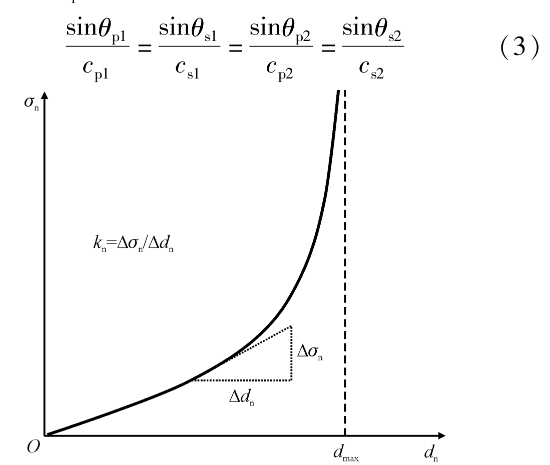


图 2　节理法向力学特性的双曲线模型示意图

Fig. 2　Hyperbolic elastic model of normal deformation behavior of a joint

Schoenberg[16] 发现即使假设节理刚度与频率无关，反射和透射系数仍依赖于入射波的频率。卢文波[17] 通过开展应力波与线性可滑移岩石节理之间相互作用的研究，揭示了节理对应力波的高频滤波效应。

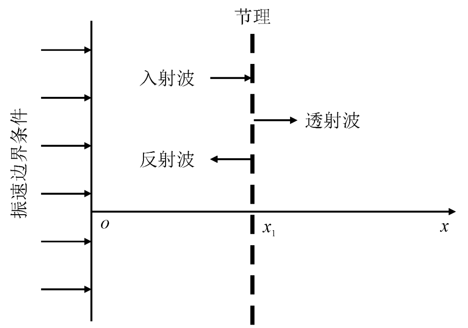
当岩体处于饱和状态时，Pyrak-nolte 等[18] 认为节理中充填的水会引起节理的黏性性质。因此，他们推导了频域内考虑节理黏弹性特性的应力波反射、透射系数的理论公式，并通过试验揭示了超声波通过完整饱和岩石试样时透射 S 波脉冲与超声波通过包含节理的岩石试样时透射 S 波脉冲之间的差异。除此之外，节理中的填充物也可能导致节理具有黏弹性特性[19]，Zhu 等[20] 将节理视为应力、位移都不连续的边界，在此假设基础上，分析了节理的黏弹性特性对透射波频谱特性的影响。

然而，在处理爆炸所产生的应力波传播问题时，研究人员发现当应力波的幅值较高时应力波会引起节理的非线性变形行为[21-29]。Miller 等[30] 推导了平面简谐剪切波垂直通过具有剪切滑移特性节理的透射和反射系数，此时，节理面上的剪切应力为滑移量和滑移速率的非线性函数。由于难以获得非线性方程的解析解，Miller 等采用了将非线性问题简化为线性问题的近似分析方法开展研究，结果表明透射系数取决于入射应力波的振幅与节理的抗剪强度。

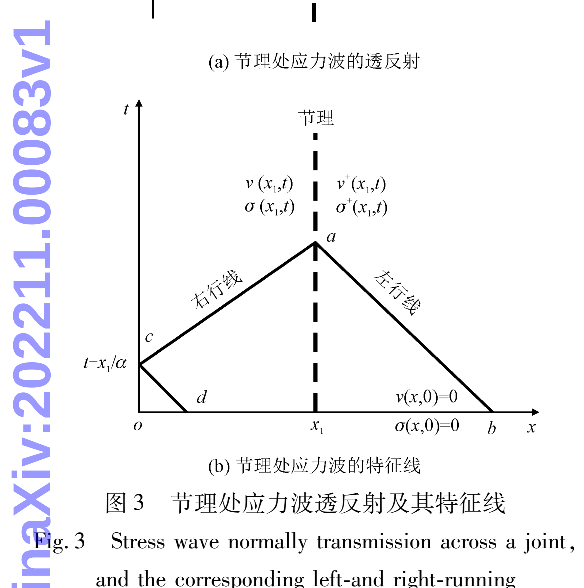
相比于频域下的分析方法，时域下时间差分分析方法能更好地适用于节理非线性响应的研究。Zhao 等[31] 采用改进的特征线法分析了平面 P 波垂直通过单条节理的透反射情况，其中，假定节理具有 Barton 等[24] 提出的双曲线型(B-B 模型)法向非线性行为(图 2)。该 B-B 模型表示为

$$\sigma_n = \frac{k_{ni} d_n}{1 - (d_n / d_{max})} \tag{4}$$

其中：d_n 和 d_{max}是节理的法向闭合量和最大允许闭合量；k_{ni}为节理的法向初始刚度。Barton 等[21] 指出 d_{max}和 k_{ni}可根据实验室测试得到的节理面粗糙度（JRC）、节理面抗压强度（JCS）和节理的平均缝宽（a_j）来确定。节理处应力波的透反射及其特征线如图 3 所示。



(a) 节理处应力波的透反射



(b) 节理处应力波的特征线

图 3　节理处应力波透反射及其特征线

Fig. 3　Stress wave normally transmission across a joint, and the corresponding left-and right-running characteristics in the x-t plane

特征线方法认为节理为非连续边界，此时，作用在节理上的应力和节理面前后的位移应满足如下条件[31]。

$$\sigma^-(x_1,t)=\sigma^+(x_1,t) \tag{5}$$

$$u^-(x_1,t)-u^+(x_1,t)=\frac{\sigma(x_1,t)}{k_{ni}+[\sigma(x_1,t)/d_{max}]} \tag{6}$$

考虑节理面前后质点振动速度，式（6）可进一步表示为

$$v^-(x_1,t)-v^+(x_1,t)=\frac{\partial\sigma(x_1,t)}{\partial t}\cdot\frac{k_{ni}}{\{k_{ni}+[\sigma(x_1,t)/d_{max}]\}^2} \tag{7}$$

特征线方法认为沿右行和左行特征线以及应力与质点振动速度的关系为[31]

$$zv(x,t)+\sigma(x,t)=\text{const}，右行特征线 \tag{8}$$

$$zv(x,t)-\sigma(x,t)=\text{const}，左行特征线 \tag{9}$$

其中 z 为应力波的阻抗。当初始时刻节理面前后质点振动速度、节理应力以及边界处的入射波已知时，由特征线方法可得到节理面前后质点振动速度和节理应力。应该注意的是，当采用特征线求解时，式（7）转化为时间差分方程。

国内外科研工作者基于特征线方法开展了大量的应力波垂直入射单条或一组平行节理的传播规律研究[32-33]。例如，Zhao 等[32] 计算了剪切波垂直入射具有库伦滑移特性节理的透射系数（图 4），结果表明入射波的剪应力峰值与节理的剪切强度之比是影响应力波透射特征的最重要因素。在此基础上，俞缙等[34-35] 提出了节理的三参数非线性本构模型，并基于该模型采用特征线法探讨了 P 波通过单条非线性节理的透射情况。Fan 等[36] 分析了具有不同加卸载变形特性的非线性节理对应力波传播规律的影响。Li 等[37] 基于特征线方法分析了 P 波垂直入射时节理的张开闭合力学特性对透射波波形、幅值和频谱的影响，并通过分离式霍普金森（SHPB）冲击实验验证该理论分析结果的正确性。Fan 等[38] 基于 g-λ 非线性节理本构模型研究了 P 波通过节理岩体时的幅值衰减和速度降低效应。Fan 等[39] 分析了软硬岩之间非线性结构面对应力波传播规律的影响。特征线方法能够快速便捷地分析应力波通过节理岩石的一维波传播规律问题，但不适用于应力波斜入射节理的情况。

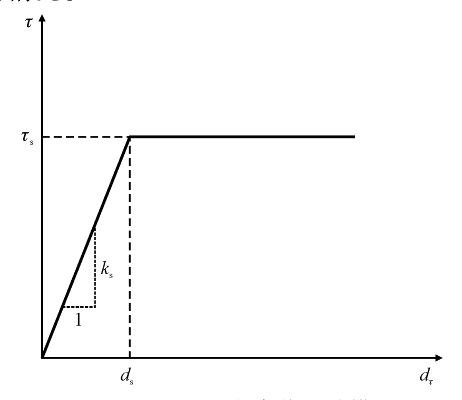


图 4　节理的切向库伦滑移模型

Fig. 4　Coulomb slip model of a joint

频域分析方法，如公式（1），可用于分析应力波以任意角度，特别是斜入射节理的情况。由于频域分析方法只针对岩体为线性系统情况，即节理和其周围的岩石都是线弹性，并不适用于节理非线性力学行为的情况，因此对于非线性节理，就必须寻求更合适的方法来研究应力波斜入射节理问题。

当应力波以任意角度斜入射节理时，为了分析节理非线性对应力波传播规律的影响，Li 等[40] 提出

了应力波二维传播规律的时域递归分析方法。在该方法中,入射波、反射波和透射波的波阵面和节理面形成的单元体满足力的平衡条件,且波阵面上满足动量守恒定律。对于 P 波以任意角度斜入射节理的情况,时域递归分析方法从分析应力波和节理之间的相互作用出发(如图 5 所示),通过分别分析节理前后单元体应力状态,得到节理面的质点振动速度以及作用在节理上的应力[40]。

$$\begin{cases}\sigma^- = z_p\cos2\theta_s(v_{Ip}+v_{Rp}) - z_s\sin2\theta_s v_{Rs}\\ \tau^- = \dfrac{z_p\sin2\theta_s\tan\theta_s}{\tan\theta_p}(v_{Ip}-v_{Rp}) - z_s\cos2\theta_s v_{Rs}\\ \sigma^+ = z_p\cos2\theta_s v_{Tp} + z_s\sin2\theta_s v_{Ts}\\ \tau^+ = \dfrac{z_p\sin2\theta_s\tan\theta_s}{\tan\theta_p}v_{Tp} - z_s\cos2\theta_s v_{Ts}\end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases}v_n^- = \cos\theta_p(v_{Ip}-v_{Rp}) + \sin\theta_s v_{Rs}\\ v_\tau^- = \sin\theta_p(v_{Ip}+v_{Rp}) + \cos\theta_s v_{Rs}\\ v_n^+ = \cos\theta_p v_{Tp} + \sin\theta_s v_{Ts}\\ v_\tau^+ = \sin\theta_p v_{Tp} - \cos\theta_s v_{Ts}\end{cases} \tag{11}$$

如果节理的法向力学特性表现为 B-B 模型(图 2)、切向力学特性为 Coulomb 滑移模型(图 4),则

$$\begin{cases}u_n^- - u_n^+ = \sigma/(k_{ni}+\sigma/d_{max})\\ u_\tau^- - u_\tau^+ = \tau/k_s, \qquad d_\tau \leqslant d_s\\ \tau = \pm\tau_s = \pm\sigma\tan\varphi, \qquad d_\tau > d_s\end{cases} \tag{12}$$

其中:k_s 表示节理的剪切刚度;τ_s 和 d_s 分别为节理的剪切强度和对应的剪切变形;φ 为节理的摩擦角。式(12)可改成质点振速差分形式,考虑节理面的位移不连续而应力连续条件,将式(10)~(11)代入式(12),可得到应力波以任意角度斜入射单条节理的传播方程为

$$\begin{bmatrix}v_{Rp}(t)\\ v_{Rs}(t)\end{bmatrix} = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}v_{Ip}(t) + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\begin{bmatrix}v_{Tp}(t)\\ v_{Ts}(t)\end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix}v_{Tp}(t+\Delta t)\\ v_{Ts}(t+\Delta t)\end{bmatrix} = \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{D}v_{Ip}(t) + \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{E}\begin{bmatrix}v_{Rp}(t)\\ v_{Rs}(t)\end{bmatrix} + \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{F}\begin{bmatrix}v_{Tp}(t)\\ v_{Ts}(t)\end{bmatrix} \tag{14}$$

其中:$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{F}$ 为参数矩阵,具体表达式见文献[40]。当系统的初始条件和边界条件已知时,基于式(13)开展计算就可得到节理处随时间变化的透射波和反射波。Li 等[41-42]采用时域递归分析方法研究了任意波形应力波通过线性和非线性节理的传播规律。Zou 等[43-44]基于时域递归分析方法开展了从数值模拟或平面波动平台获得的数据中分离节理面前后透、反射 P 波、SV 波的方法。Li 等[45]基于时域递归分析方法分析了节理的张开闭合力学特性对 P 波斜入射节理后能量衰减的影响。Liu 等[46]利用时域递归分析方法分析了不同应力下应力波以任意角度斜入射非线性节理的传播规律。汪书敏等[47]基于时域递归分析方法分析了节理黏弹性特性对应力波传播规律的影响。

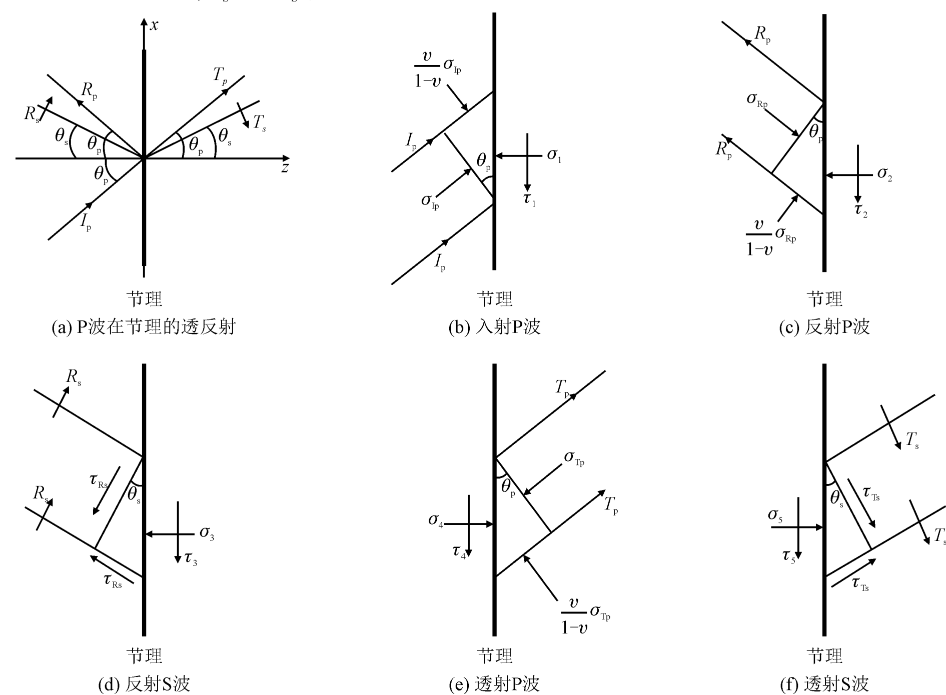


图 5　时域分析方法的力学模型(针对 P 波斜入射情况)

Fig. 5　Stress analysis for an P wave incident on a joint

1.2　应力波通过一组平行节理的传播

自然界的节理通常成组出现,节理在每个节理组中基本呈现为保持一定距离的平行状态[48]。当相邻节理之间距离较大时,透射波主要取决于首达波,从而可忽略应力波在节理之间的多次透反射产生的次达波。Pyrak-Nolte 等[49]基于忽略节理间多次透反射的假设,提出了一个计算应力波垂直通过多条平行节理后透射系数的简化公式:$|T_N| = |T_1|^N$,其中:$|T_1|$为应力波垂直透过单条节理时透射波与入射波的幅值之比;N 为节理数量。该简化公式认为随着应力波通过节理数量的增加,应力波透射系数成幂次方下降。然而当节理的间距较小时(相较于波长),多次透反射的影响增强,该公式将不再适用。为了考虑应力波在节理间多次透反射的影响,近年来一些新的理论分析方法也不断涌现,如矩阵传递法、虚拟波源法、特征线法、时域递归法。

矩阵传递法侧重于在频域内求解问题。Zhao 等[50]利用矩阵传递法研究了简谐平面 P 波和 SV 波以任意角度斜入射多条平行的线性节理的衰减规律,并开展了影响参数分析,如节理的间距、数量和刚度以及入射角等。Perino 等[51]使用矩阵传递法分析了平面 SH 波倾斜入射非线性节理的情况,并采用 Coulomb 滑移模型描述节理的切向变形行为。Huang 等[52]用矩阵传递法计算了应力波通过具有黏弹性的一组平行节理的透射和反射系数。值得注意的是,矩阵传递法获得了频域解,但是对于节理为非线性的问题,它需要将非线性问题简化为线性问题才能得到非线性方程的近似解[30]。

除了矩阵传递法,Cai 等[1]改进了特征线法来考虑应力波在节理之间的多次透反射对透射波的波形和能量的影响。Zhao 等[32,53-54]利用改进的特征线法计算了 P 波、SV 波垂直通过一组线性或非线性平行节理后的透射系数。在采用特征线法来分析问题时,需要首先将微分方程转化为时间差分方程,由此得到用质点振动速度和应力表达的应力波传播方程,然后开展数值求解。特征线方法可以对具有任意波形的入射波进行直接求解分析。需要注意的是,特征线法要求计算的时间步足够小,以保证计算的准确性,此外,特征线法难以处理应力波以任意角度斜入射的情况。

Li 等[55]提出的虚拟波源法也被用于考虑应力波在节理之间的多次透反射对透射波的影响。该方法中,虚拟波源被放置于节理处,当任何透射或者反射波到达该节理位置时虚拟波源都会产生新的应力波。因此,应力波在岩体中传播一段距离后所产生的透射波可以看作是应力波通过该段节理的直接传播(首达波)及由虚拟波源产生的透射波(次达波)的叠加。Zhu 等[56]将虚拟波源的概念引入到位移不连续方法,分析了应力波垂直入射一组线性节理的情况。相比于特征线法,Zhu 等[57]认为虚拟波源法具有以下优点:首先,虚拟波源法可以获得准确的理论解,而特征线法需要将微分方程转化为差分方程,由此不可避免地产生计算误差;其次,虚拟波源法可以轻松分离不同时刻到达的透射波;此外,虚拟波源法可以扩展到研究更复杂情况的波传播问题,例如应力波斜入射节理的情况[57]。虚拟波源法的优点非常明显,但是也存在它的局限性,即难以处理节理非线性的问题。

当应力波在相邻节理之间岩石中的传播规律得到后,时域递归分析方法也可用于分析应力波斜入射一组线性和非线性平行节理的情况[58-61]。如果相邻节理之间岩石为弹性介质,则岩石中的应力波为时间平移函数,即

$$\begin{bmatrix} v_{\mathrm{rp},J}^{-}(t) \\ v_{\mathrm{lp},J}^{+}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{\mathrm{rp},J-1}^{+} \\ v_{\mathrm{lp},J+1}^{-} \end{bmatrix} \left(t - \frac{S}{\cos\theta_{\mathrm{p}} \cdot c_{\mathrm{p}}} \right) \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} v_{\mathrm{rs},J}^{-}(t) \\ v_{\mathrm{ls},J}^{+}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{\mathrm{rs},J-1}^{+} \\ v_{\mathrm{ls},J+1}^{-} \end{bmatrix} \left(t - \frac{S}{\cos\theta_{\mathrm{s}} \cdot c_{\mathrm{s}}} \right) \tag{16}$$

其中:S 为节理间距;J 为节理编号;下标 lp、rp、ls 和 rs 分别表示左行、右行 P 波和 S 波。时域递归分析方法需要将微分方程转变为差分方程,因此需要将计算时间步设置到一定小的程度以确保计算的精度。Li 等[62]利用时域递归分析方法提出了确定填充节理法向和切向刚度的方法。

以上理论方法各有优缺点,且它们只适用于分析应力波穿过单条或平行的无限延伸节理的情况。而对于复杂的多组交叉节理,需要采用数值计算方法才能得到结果。但是理论分析方法获得的结果可以作为数值计算方法的校正基础。

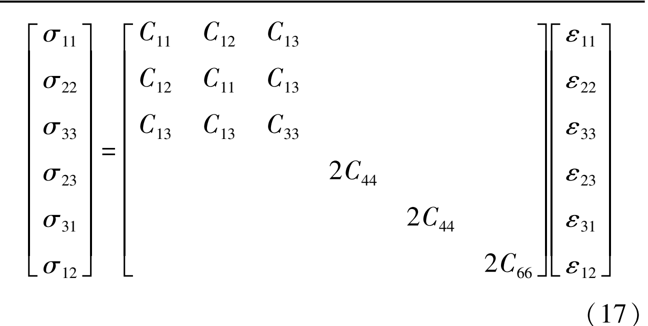
1.3　应力波通过交叉节理

当岩体中存在交叉节理组时,应力波的传播过程变得非常复杂。Chai 等[63-64]采用理论方法分析了平面 P 波通过两条交叉节理的透射规律。由于问题的复杂性,该理论研究忽略了应力波在节理交叉

点处的散射效应。对于含多组交叉节理组的岩体，数值模拟方法是研究应力波传播的有效方法。在有限元法和有限差分法中，通常用特定的节理单元来表征节理[65]。Song 等[66]用有限元法分析了应力波作用下含交叉节理组的岩质边坡的变形特征。Dai 等[67]用有限差分法分析了爆破应力波作用下含多个交叉节理组的岩质边坡的位移响应。然而这样的节理处理方案只适用于节理数量少且小变形的情况。相对而言，离散元法在处理应力波通过复杂分布节理问题上具有明显的优势。在离散元法(DEM)中，岩体被视为块体的组合，而节理作为块体之间的界面[68]。Chen 等[69]用 UDEC(二维离散元软件)模拟了爆破产生的应力波在包含两条正交节理的岩体中的传播。Zhu 等[70]用 UDEC 分析了应力波穿过多个交叉节理组的情况，系统地探讨了节理的力学和空间分布包括节理法向刚度和剪切刚度、节理间距、节理组之间的交叉角、入射波方向和节理组数的影响。之后，Zhu 等[71-73]用 UDEC 分析了爆破诱发的应力波通过含交叉节理的岩体后引起的地下洞室围岩破坏情况。其他的离散元法，如不连续变形分析方法(DDA)[74-76]、有限元-离散元耦合方法(FDEM)[77]也被开发用于研究应力波在复杂岩体中传播规律。值得指出的是，目前大部分的数值分析限于应力波二维传播问题。然而二维模型难以全面反映三维空间中节理组分布情况。Deng 等[78]用 3DEC 分析了地下洞室爆破产生的应力波通过 3 组节理组的传播规律。Haghnejad 等[79]用 3DEC 分析了节理组的倾向对应力波传播规律的影响。Li 等[80]用 3DEC 分析了爆破应力波作用下两组节理的岩体中洞室围岩的变形特征。上述数值研究的关键是要首先获取可靠的节理力学参数，从而为准确预测应力波在复杂岩体中衰减规律提供保障。

2　岩体动态等效连续介质方法

岩体动态等效连续介质方法是分析应力波在岩体中传播规律的另一有效方法。等效介质法将岩体视作连续介质，用等效介质的有效模量来描述节理对岩体力学特征的影响。节理通常以平行成组的形式出现[48-49]，导致岩体力学性质呈现各向异性。典型的含一组平行节理的岩体等效模量计算模型如图 6 所示。通过 5 个弹性常数来描述该岩体横观各向同性，其应力和应变关系为[49]



$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&&&\\ C_{12}&C_{11}&C_{13}&&&\\ C_{13}&C_{13}&C_{33}&&&\\ &&&2C_{44}&&\\ &&&&2C_{44}&\\ &&&&&2C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31}\\ \varepsilon_{12}\end{bmatrix} \tag{17}$$

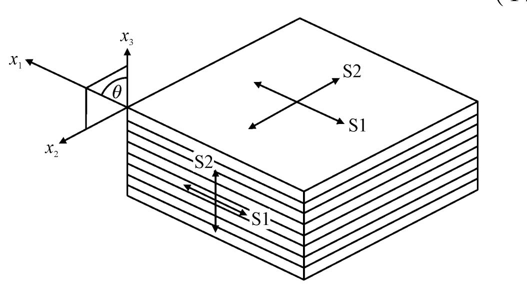


图 6　含一组节理的岩体等效模量计算模型

Fig. 6　Calculation model of equivalent modulus of rock mass containing a set of parallel joints

基于准静态或长波长假设，文献[81-82]采用平均应变法推导了这 5 个弹性常数与完整岩石弹性参数、节理间距和节理度之间的关系，即

$$\begin{cases}C_{33}=\mu/(\gamma+E_{\mathrm{n}})\\ C_{44}=\mu/(1+E_{\mathrm{t}})\\ C_{66}=\mu\\ C_{13}=(1-2\gamma)C_{33}\\ C_{11}=[1+4(1-\gamma)E_{\mathrm{n}}]C_{33}\\ C_{12}=C_{11}-2C_{66}\end{cases} \tag{18}$$

其中

$$\begin{cases}E_{\mathrm{t}}=\mu/(Sk_{\mathrm{t}})\\ E_{\mathrm{n}}=\mu/(Sk_{\mathrm{n}})\\ \gamma=(1-2\upsilon)/(2-2\upsilon)\end{cases} \tag{19}$$

式中：μ 为完整岩石的剪切模量；υ 为完整岩石的泊松比；S 为节理间距；k_{t} 和 k_{n} 分别为节理的切向和法向比刚度；E_{t} 和 E_{n} 分别表示节理对岩体力学性质的贡献，当 $k_{\mathrm{t(n)}}\to\infty$ 时，$E_{\mathrm{t(n)}}\to 0$，此时岩体的弹性常数等于完整岩石的弹性参数。

Daley[83]和 Thomsen[84]给出了 P 波、SV 波和 SH 波在横观各向同性介质中的相速度表达式为

$$\begin{cases}\rho c_{\mathrm{P}}^2(\theta)=\dfrac{1}{2}[C_{33}+C_{44}+(C_{11}-C_{33})\sin^2\theta+D(\theta)]\\ \rho c_{\mathrm{SV}}^2(\theta)=\dfrac{1}{2}[C_{33}+C_{44}+(C_{11}-C_{33})\sin^2\theta-D(\theta)]\\ \rho c_{\mathrm{SH}}^2(\theta)=C_{66}\sin^2\theta+C_{44}\cos^2\theta\end{cases} \tag{20}$$

其中:θ 为应力波传播方向与节理法向之间的夹角;c_P、c_{SV} 和 c_{SH} 分别为 P 波、SV 波和 SH 波波速。

$$D(\theta) = \{(C_{33} - C_{44})^2 + 4(C_{13} + C_{44})^2 \sin^2\theta - 2[(C_{33} - C_{44})(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})]\sin^2\theta + [(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})^2 - 4(C_{13} + C_{44})^2]\sin^4\theta\}^{1/2} \tag{21}$$

由于上述等效介质法将含节理的岩体等效为理想弹性介质,且无法考虑应力波在节理之间多次透反射情况,因此该方法难以考虑波速的频率相关性和透射波的幅值衰减规律[85]。Li 等[55] 指出等效介质法用等效模量隐式地考虑了节理的作用,忽略了节理组对应力波的多次透反射效应。

Pyrak-Nolte[49] 建议采用等效黏弹性模型分析应力波在岩体中传播时出现的频率相关的波速变化和幅值衰减效应。黏弹性模型可以反应固体的黏弹性特性,可用于分析应力波在黏弹性介质中的传播规律[86]。现有的黏弹性模型包括 Kelvin 模型[87]、Maxwell 模型以及广义的黏弹性模型[88]。Li 等[55] 采用广义黏弹性模型,即 Voiget 体和弹簧元件串联形成的三单元体(图 7)分析了频域内平面 P 波垂直穿过一组平行线性节理的衰减规律(图 8a),并引入虚拟波源(图 8c)考虑了应力波在节理之间的多次透反射。该广义黏弹性模型在固体力学中应用广泛,其应力应变关系为[55]

$$(E_a + E_v)\sigma + \eta_v \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \eta_v E_a \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - E_v E_a \varepsilon = 0 \tag{22}$$

其中:E_a 为岩石的弹性模量;E_v 为节理所贡献的介质拉伸压缩刚度;η_v 为黏性系数。

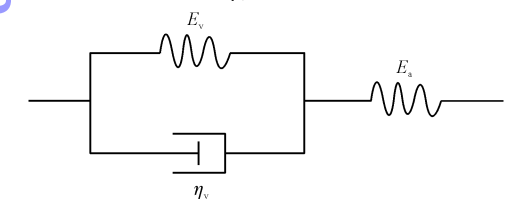


图 7 Voiget 体和弹簧元件串联的三单元体

Fig. 7 Three-element viscoelastic model composes of a spring in series with a Voigt model

对于 P 波的一维传播问题,式(22)的质点振动速度的通解为

$$v = A_m \exp(\beta x)\exp[i(\omega t - \alpha x)] \tag{23}$$

其中:A_m 为入射波的幅值;ω 为圆频率;β 为应力波幅值衰减系数;α 表示单位长度的相位偏移量。根据位移不连续方法,简谐 P 波 $v_I = A_m \exp(i\omega t)$ 通过单条节理后的透射波为[55]

$$v_T = \frac{2k_n/z_p}{\sqrt{\omega^2 + (2k_n/z_p)^2}} A_m \times \exp[i(\omega t - x\omega/c_p + t_g)] \tag{24}$$

$$t_g = \tan^{-1}[-\omega/(2k_n/z_p)] \tag{25}$$

当节理间距为 S,由节理和岩石组成代表性单位体的长度为 S,因此在 $x = S$ 处,由式(23)得到的质点振动速度应该等于由式(24)得到的结果,由此求解得到式(23)中的未知参数 β 和 α 为

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{1}{S}\ln\left[\dfrac{2k_n/z_p}{\sqrt{\omega^2 + (2k_n/z_p)^2}}\right] \\ \alpha = \dfrac{\omega}{c_p} + \dfrac{1}{S}\tan^{-1}\left(\dfrac{\omega}{2k_n/z_p}\right) \end{cases} \tag{26}$$

从式(23)可以发现,等效黏弹性介质模型虽然可以考虑波速频散效应和幅值衰减效应,但是忽略了应力波在节理之间的多次透反射效应。为了解决该问题,假设每个节理对应的位置处都有一个虚拟波源,其作用是当任何入射、透射或反射波到达节理位置时,都会有应力波从虚拟波源产生。虚拟波源产生的应力波应该确保整个系统能量守恒,即入射波产生的能量等于通过该岩体的透射波和反射波产生的能量之和。例如当入射 P 波从 a 点出发到达 b 点时,根据式(23),b 点的质点振速为

$$v_e(t,S) = A_m \exp(\beta S)\exp[i(\omega t - \alpha S)] \tag{27}$$

式中下标 e 表示基于等效黏弹性介质模型。根据能量守恒定理和 Kramer-Kronig 关系,b 点处由虚拟波源产生的反射波为

$$v_e'(t,S) = A_m \sqrt{1 - [\exp(\beta S)]^2} \times \exp[i(\omega t + \alpha S - \pi/2)] \tag{28}$$

此时,b 点处的入射波和虚拟波源产生的反射波沿着相反方向分别传播至 a 和 c 点位置,然后,a 和 c 点的虚拟波源产生新的反射波,并周而复始。因此,通过等效黏弹性介质的透射波(图 8 中 d 点)为不同时刻到达的多个透射波的叠加。

Li 等[55] 证明了此方法获得的透射波与基于特征线方法得到的结果一致。之后,Ma 等[48] 用相同的方法分析了 P 波垂直通过多条平行大间距节理时的速度频散效应和幅值衰减效应。Fan 等[89] 提出了考虑节理非线性变形特征的岩体等效黏弹性介质模型,用以分析 P 波垂直通过等间距非线性节理的透射规律。值得注意的是上述等效黏弹性介质法局限于解决应力波一维传播规律的问题。当岩体中存在多组节理时,岩体可视为各向同性介质,Li 等[88] 采

用 Kelvin 模型并结合岩体动态品质因子,得到各向同性岩体的等效连续介质模型,并在此基础上分析应力波通过多层岩体的传播问题[87-88,90],该方法为应力波传播规律分析方法的实际工程应用提供了基础。

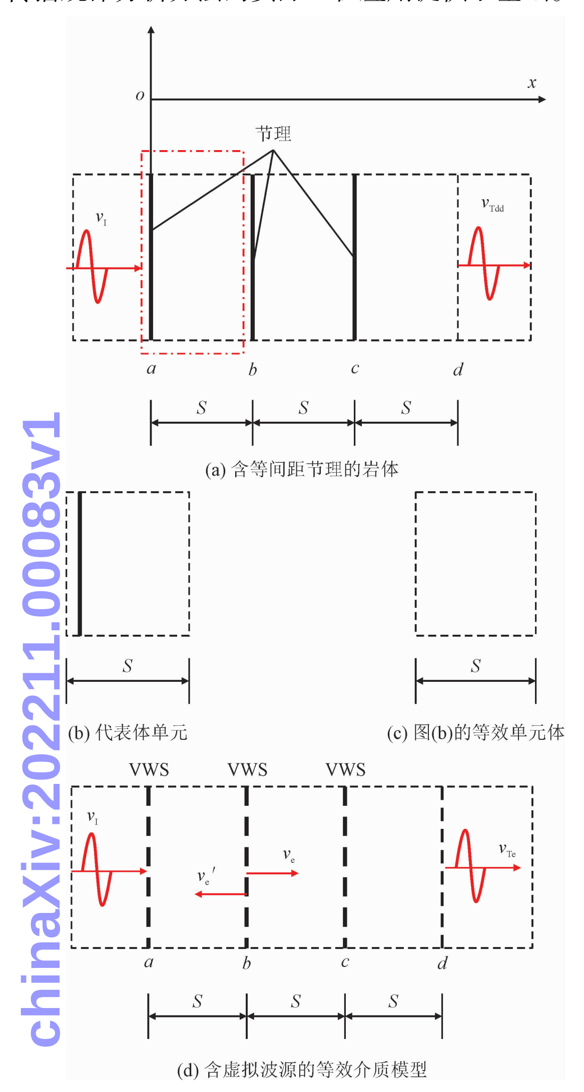


图 8　基于虚拟波源的岩体等效黏弹性介质模型方法

Fig. 8　Equivalent viscoelastic medium model including “virtual wave source”

3　双尺度非连续耦合方法

随着极端环境下岩体工程的发展,高低温岩体力学特性日益受到重视。在温度的影响下,岩体内出现不可忽略的细观裂隙,如图 9 所示。温度导致的岩体内细观裂隙的产生会进一步影响应力波的传播。含细观裂隙的岩体通常被等效为完全弹性的介质,采用等效弹性模型研究应力波的传播特性。另外,实验研究表明应力波在含细观裂隙的岩体内传播时会发生速度频散效应和幅值衰减效应[91-94]。Johnston[95]和刘建华等[96]将含细观裂隙的岩体内波的衰减归结为由摩擦、流体流动、黏性松弛和散射造成的。因此,等效黏弹性介质被提出用于研究含细观裂隙的岩体的动态力学行为[97]。Ren 等[98]基于数值模拟的方法进一步验证了含细观裂隙的岩体的等效黏弹性特性。Fan 等[91]采用 Maxwell 体和弹簧元件并联的三单元体来描述含细观裂隙的岩体的黏弹性行为。Niu 等[99]通过数值和试验相结合的方法,确定了含细观裂隙的岩体的黏性系数。

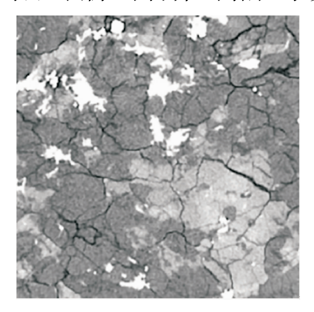


图 9　岩体内的细观裂隙

Fig. 9　Micro-defects in rock mass

基于含细观裂隙的岩体的等效黏弹性模型,三特征线方法被提出来研究应力波在黏弹性介质中的传播(图 10)。根据应力波传播的运动方程为

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial\sigma}{\partial x}=0 \tag{29}$$

其中 ρ 为岩体密度。

应力波传播的连续方程为

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{30}$$

结合黏弹性介质模型的本构方程,可以得到三族特征线和对应的相容关系。从而建立计算含细观裂隙的岩体内应力波传播的三特征线方法,如图 10 所示。根据三族特征线和特征线对应的相容关系可以求得含细观裂隙的岩体内应力波传播的质点应力、质点速度和质点应变。

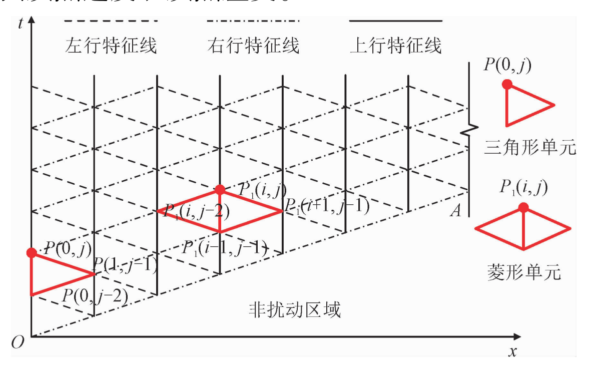


图 10　三特征线方法

Fig. 10　Three characteristic lines method

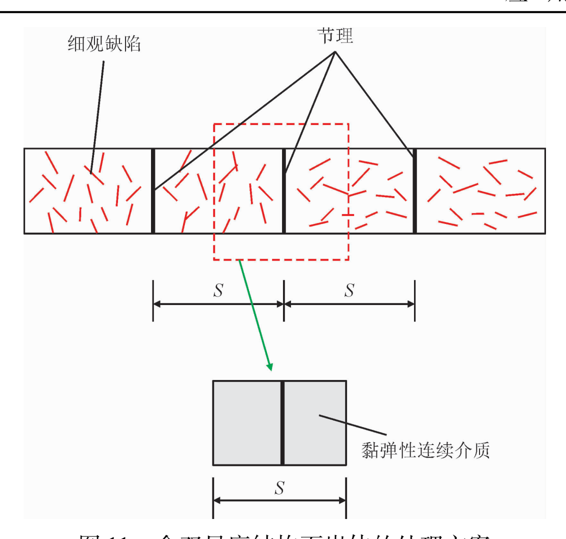


图 11　含双尺度结构面岩体的处理方案

Fig. 11　Scheme of modeling of rock mass with double-scale discontinuities

岩体内除了细观裂隙，宏观节理对应力波的传播也存在显著的影响。不同尺度的不连续结构面影响应力波传播的作用机理是不同的。宏观节理使得应力波在传播的过程中发生透射和反射的现象，而细观裂隙使得应力波产生弥散和衰减。因此，建立统一模型描述含细观裂隙和宏观节理的岩体，并在统一框架下分析含细观裂隙和宏观节理的岩体内应力波的传播是困难的。因此，Fan 等[100]将等效介质与位移不连续结合，提出了均匀不连续模型来描述含细观裂隙和宏观节理的岩体，在频域内分析了一维应力波在含双尺度结构面的岩体中的传播规律，其中包含细观裂隙的岩石被等效为黏弹性连续介质，宏观节理被视为位移不连续边界条件。图 11 表示了含双尺度结构面岩体的处理方案。王昊等[101]用相同的处理方法在频域内计算了平面 P 波以任意角度倾斜通过含双尺度结构面的岩体的透射系数。

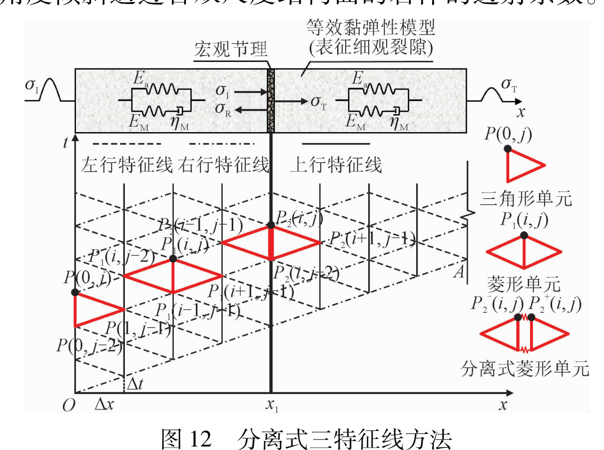


图 12　分离式三特征线方法

Fig. 12　Split three characteristic lines method

针对含双尺度结构面岩体的均匀不连续建模思路，Fan 等[102]将三特征线与位移不连续相结合，提出了分离式三特征线方法，在时域内分析了应力波通过含双尺度结构面的岩体的透射系数和有效速度。分离式三特征线方法如图 12 所示。与传统的三特征线方法不同，分离式三特征线方法中除了计算边界点和岩体内部点处应力波传播的三角形单元和菱形单元，还引入了计算应力波在宏观节理处传播的分离式菱形单元。分离式三特征线方法中的三种基本单元，如图 12 所示。以上研究均基于宏观节理为线性变形的情况，适用于宏观节理位于应力波远场时。然而，当宏观节理位于应力波近场或者含有填充物质时，需考虑宏观节理的非线性变形。针对应力波穿越非线性宏观节理的情况，Fan 等[102-103]通过引入分段线性位移不连续方法，改进了王礼立[104]提出的三特征线时域分析方法，分析了非线性宏观节理对一维应力波穿越含双尺度结构面的岩体的影响。随后，通过将多脉冲作用下宏观节理的力学特性引入到三特征线时域分析方法，研究了多脉冲应力波在含双尺度结构面的岩体内的传播特性[105]。另外，Huang 等[52]通过改进矩阵传递法在频域内计算了应力波在倾斜穿越含双尺度结构面的岩体时的透射、反射系数。

4　结论与展望

岩体中广泛存在的节理对应力波的幅值衰减和速度频散具有明显的影响。近年来，学者们提出了不同的理论分析方法用于分析应力波在岩体中的传播规律研究。本研究对现有方法进行了详细地综述，并探讨了它们的适用范围。

在非连续介质方法中，基于位移不连续方法的特征线法、时域递归分析法、矩阵传递法已被广泛地用于分析应力波通过单条和一组节理的问题。相对于频域分析方法，时域分析方法由于可直接分析任意波形的入射波的传播问题，从而简化求解过程。然而，位移不连续方法不适用于应力波通过交叉节理组的复杂情况。已有的数值方法，如有限元法、有限差分法、离散元法以及耦合方法可以分析应力波通过节理复杂空间分布的情况，但是它们面临的两个关键问题，首先是节理的动态力学模型准确描述，其次，数值算法有待改进从而提高计算性能。

对于动态等效连续介质法，目前提出的考虑虚拟波源的岩体黏弹性动态等效连续介质方法能够解

释应力波在含结构面的岩体中传播时发生的频率相关的幅值衰减和速度降低的现象，但是该方法局限于应力波一维传播问题，对于高维度的问题，目前在一些特定情况下提出了基于岩体动态品质因子的黏弹性等效介质方法，该方法还有待开展进一步的研究。

连续和非连续耦合方法适用于分析岩体中含有宏观节理和细观岩石裂隙，该方法目前侧重于应力波一维传播规律研究，如果和基于岩体动态品质因子的黏弹性等效介质方法相结合，可开展应力波二维传播问题的研究。

参考文献：

[1] CAI J G,ZHAO J. Effects of multiple parallel fractures on apparent attenuation of stress waves in rock masses[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences,2000,37(4):661-682.

[2] 戎立帆，李建春，李海波，等. 基于能量法测量节理岩体品质因子的实验研究[J]. 岩石力学与工程学报,2017,36(10):2474-2483.
RONG Lifan,LI Jianchun,LI Haibo,et al. Measurement of seismic quality factor of jointed rock based on stress wave energy[J]. Chinese journal of rock mechanics and engineering,2017,36(10):2474-2483(in Chinese).

[3] 吴如山. 地震波散射：理论与应用[J]. 地球物理学进展,1989(4):1-23.
WU Rushan. Seismic wave scattering theory and application[J]. Progress in geophysics,1989(4):1-23(in Chinese).

[4] MAL A K. Interactionof elastic waves with a penny-shaped crack[J]. International journal of engineering science,1970,8(5):381-388.

[5] OCONNELL R J,BUDIANSKY B. Seismicvelocities in dry and saturated cracked solids[J]. Journal of geophysical research,1974,79(35):5412-5426.

[6] PIAU M. Attenuationof a plane compressional wave by a random distribution of thin circular cracks[J]. International journal of engineering science,1979,17(2):151-167.

[7] CRAMPIN S,MCGONIGLE R,BAMFORD D. Estimating crack parameters from observations of P-wave velocity anisotropy[J]. Geophysics,1980,45(3):345-360.

[8] 李夕兵. 论岩体软弱结构面对应力波传播的影响[J]. 爆炸与冲击,1993(4):334-342.
LI Xibing. Influence of the structural weakness planes in rock mass on the propagation of stress waves[J]. Explosion and shock waves,1993(4):334-342(in Chinese).

[9] 王卫华，李夕兵，左宇军. 非线性法向变形节理对弹性纵波传播的影响[J]. 岩石力学与工程学报,2006(6):1218-1225.
WANG Weihua,LI Xibing,ZUO Yujun. Effects of single joint with nonlinear normal deformation on P-wave propagation[J]. Chinese journal of rock mechanics and engineering,2006(6):1218-1225 (in Chinese).

[10] LI J C,LI N N,LI H B,et al. An SHPB test study on wave propagation across rock masses with different contact area ratios of joint[J]. International journal of impact engineering,2017,105:109-116.

[11] LI J C,RONG L F,LI H B,et al. An SHPB test study on stress wave energy attenuation in jointed rock masses[J]. Rock mechanics and rock engineering,2019,52(2):403-420.

[12] LI X F,LI H B,LI J C,et al. Research on transient wave propagation across nonlinear joints filled with granular materials[J]. Rock mechanics and rock engineering,2018,51(8):2373-2393.

[13] 刘斓，李新平，孙吉主，等. 随机粗糙充填节理对 S 波传播影响的数值研究[J]. 防灾减灾工程学报,2021,41(2):385-393.
LIU Lan,LI Xinping,SUN Jizhu,et al. Numerical study on the effect of a random rough filled joint on S-wave propagation[J]. Journal of disaster prevention and mitigation engineering,2021,41(2):385-393(in Chinese).

[14] WANG S W,LI J C,LI X,et al. Dynamic photoelastic experimental study on the influence of joint surface geometrical property on wave propagation and stress disturbance[J]. International journal of rock mechanics & mining sciences,2022,149:104985.

[15] 刘佑荣，唐辉明. 岩体力学[M]. 武汉：中国地质大学出版社,1999.

[16] SCHOENBERG M. Elastic wave behavior across linear slip interfaces[J]. The journal of the acoustical society of America,1980,68(5):1516-1521.

[17] 卢文波. 应力波与可滑移岩石界面间的相互作用研究[J]. 岩土力学,1996(3):70-75.
LU Wenbo. Astudy on interaction between stress wave and slipping rock interface[J]. Rock and soil mechanics,1996(3):70-75(in Chinese).

[18] PYRAK-NOLTE L J,MYER L R,COOK N G W. Transmission of seismic-waves across single natural fractures[J]. Journal of geophysical research-solid earth and planets,1990,95(6):8617-8638.

[19] WU W,ZHU J B,ZHAO J. Dynamic response of a rock fracture filled with viscoelastic materials[J]. Engineering geology,2013,160:1-7.

[20] ZHU J B,PERINO A,ZHAO G F,et al. Seismic response of a single and a set of filled joints of viscoelastic deformational behaviour[J]. Geophysical journal international,2011,186(3):1315-1330.

[21] KULHAWY F H. Stress deformation properties of rock and rock discontinuities[J]. Engineering geology,1975,9(4):327-350.

[22] GOODMAN R E. Methods of geological engineering in discontinuous rocks[M]. New York:West Group,1976.

[23] BANDIS S C,LUMSDEN A C,BARTON N R. Fundamentals of rock joint deformation[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences & geomechanics abstracts,1983,20(6):249-268.

[24] BARTON N,BANDIS S,BAKHTAR K. Strength,deformation and conductivity coupling of rock joints[J]. International journal of

rock mechanics and mining sciences & geomechanics abstracts, 1985, 22(3): 121-140.

[25] MALAMA B, KULATILAKE P H S W. Models for normal fracture deformation under compressive loading[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences, 2003, 40(6): 893-901.

[26] ZHAO J, CAI J G, ZHAO X B, et al. Dynamic model of fracture normal behaviour and application to prediction of stress wave attenuation across fractures[J]. Rock mechanics and rock engineering, 2007, 41(5): 671-693.

[27] LI J C, MA G W. Experimental study of stress wave propagation across a filled rock joint[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences, 2009, 46(3): 471-478.

[28] LI J C, MA G W, HUANG X. Analysis of wave propagation through filled rock joint[J]. Rock mechanics and rock engineering, 2010, 43(6): 789-798.

[29] YAN Y T, LI J C, LI X. Dynamic viscoelastic model for rock joints under compressive loading[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences, 2022, 154: 105123.

[30] MILLER R K. An approximate method of analysis of the transmission of elastic waves through a frictional boundary[J]. Journal of applied mechanics, 1977, 44(4): 652-656.

[31] ZHAO J, CAI J G. Transmission of elastic P-waves across single fractures with a nonlinear normal deformational behavior[J]. Rock mechanics and rock engineering, 2001, 34(1): 3-22.

[32] ZHAO X B, ZHAO J, HEFNY A M, et al. Normal transmission of s-wave across parallel fractures with coulomb slip behavior[J]. Journal of engineering mechanics, 2006, 132(6): 641-650.

[33] LI J C, WU W, LI H B, et al. A thin-layer interface model for wave propagation through filled rock joints[J]. Journal of applied geophysics. 2013, 91: 31-38.

[34] 俞缙,赵晓豹,赵维炳,等. 改进的岩石节理弹性非线性法向变形本构模型研究[J]. 岩土工程学报,2008(9):1316-1321.
YU Jin, ZHAO Xiaobao, ZHAO Weibing, et al. Improved nonlinear elastic constitutive model for normal deformation of rock fractures [J]. Chinese journal of geotechnical engineering, 2008(9): 1316-1321(in Chinese).

[35] 俞缙,钱七虎,林从谋,等. 纵波在改进的弹性非线性法向变形行为单节理处的传播特性研究[J]. 岩土工程学报,2009,31(8):1156-1164.
YU Jin, QIAN Qihu, LIN Congmou, et al. Transmission of elastic P-wave across one fracture with improved nonlinear normal deformation behaviors[J]. Chinese journal of geotechnical engineering, 2009, 31(8): 1156-1164(in Chinese).

[36] FAN L F, WONG L N Y. Stress wave transmission across a filled joint with different loading/unloading behavior[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences, 2013, 60: 227-234.

[37] LI J C, ZHAO X B, LI H B, et al. Analytical study for stress wave interaction with rock joints having unequally close-open behavior [J]. Rock mechanics and rock engineering, 2016, 49(8): 3155-3164.

[38] FAN Z, ZHANG J, XU H, et al. Transmission and application of a P-wave across joints based on a modified g-λ model[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences, 2022, 150: 104991.

[39] FAN L F, WANG L J, WANG M, et al. Investigation of stress wave transmission across a nonlinearly jointed complex rock mass[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences, 2020, 136: 104485.

[40] LI J C, MA G W, ZHAO J. Stress wave interaction with a nonlinear and slippery rock joint[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences, 2011, 48(3): 493-500.

[41] LI J C, MA G W. Analysis of blast wave interaction with a rock joint[J]. Rock mechanics and rock engineering, 2010, 43(6): 777-787.

[42] LI J C, MA G W, ZHAO J. Analysis of stochastic seismic wave interaction with a slippery rock fault[J]. Rock mechanics and rock engineering, 2011, 44(1): 85-92.

[43] ZOU Y, LI J C, HE L, et al. Wave propagation in the vicinities of rock fractures under obliquely incident wave[J]. Rock mechanics and rock engineering, 2015, 49(5): 1789-1802.

[44] ZOU Y, LI J C, ZHAO J. A novel experimental method to investigate the seismic response of rock joints under obliquely incident wave[J]. Rock mechanics and rock engineering, 2019, 52(9): 3459-3466.

[45] LI Z L, LI J C, LI H B, et al. Effects of a set of parallel joints with unequal close-open behavior on stress wave energy attenuation[J]. Waves random complex medium, 2021, 31(6): 2427-2451.

[46] LIU T T, LI X P, ZHENG Y, et al. Analysis of seismic waves propagation through an in situ stressed rock mass using a nonlinear model [J]. International journal of geomechanics, 2020, 20(3): 04020002.

[47] 汪书敏,王志亮,贾帅龙,等. 黏弹性节理岩体中应力波的传播特性分析[J]. 哈尔滨工业大学学报,2022,54(2):99-107.
WANG Shumin, WANG Zhiliang, JIA Shuailong, et al. Analysis of propagation characteristics of stress waves in viscoelastic jointed rock mass[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2022, 54 (2): 99-107 (in Chinese).

[48] MA G W, FAN L F, LI J C. Evaluation of equivalent medium methods for stress wave propagation in jointed rock mass[J]. International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, 2013, 37(7): 701-715.

[49] PYRAK-NOLTE L J, MYER L R, COOK N G W. Anisotropy in seismic velocities and amplitudes from multiple parallel fractures [J]. Journal of geophysical research-solid earth and planets, 1990, 95(7): 11345-11358.

[50] ZHAO X B, ZHU J B, ZHAO J, et al. Study of wave attenuation across parallel fractures using propagator matrix method[J]. International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, 2012, 36(10): 1264-1279.

[51] PERINO A, ORTA R, BARLA G. Wave propagation in discontinuous media by the scattering matrix method[J]. Rock mechanics and rock engineering, 2012, 45(5): 901-918.

[52] HUANG X L, QI S W, LIU Y S, et al. Stress wave propagation through viscous-elastic jointed rock masses using propagator matrix method (PMM)[J]. Geophysical journal international, 2015, 200(1): 452-470.

[53] ZHAO J, ZHAO X B, CAI J G. Afurther study of P-wave attenuation across parallel fractures with linear deformational behaviour[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences, 2006, 43(5): 776-788.

[54] ZHAO X B, ZHAO J, CAI G J. P-wave transmission across fractures with nonlinear deformational behaviour[J]. International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, 2006, 30(11): 1097-1112.

[55] LI J C, MA G W, ZHAO J. An equivalent viscoelastic model for rock mass with parallel joints[J]. Journal of geophysical research-solid earth and planets, 2010, 115(3): 1923-1941.

[56] ZHU J B, ZHAO X B, LI J C, et al. Normally incident wave propagation across a joint set with the virtual wave source method[J]. Journal of applied geophysics, 2011, 73(3): 283-288.

[57] ZHU J B, ZHAO J. Obliquely incident wave propagation across rock joints with virtual wave source method[J]. Journal of applied geophysics, 2013, 88: 23-30.

[58] LI J C, LI H B, MA G W, et al. A time-domain recursive method to analyse transient wave propagation across rock joints[J]. Geophysical journal international, 2012, 188(2): 631-644.

[59] LI J C. Wave propagation across non-linear rock joints based on time-domain recursive method[J]. Geophysical journal international, 2013, 193(2): 970-985.

[60] LIU T T, LI X P, ZHENG Y, et al. Study on S-wave propagation through parallel rock joints under in situ stress[J]. Waves in random and complex media, 2022, 32(3): 1174-1197.

[61] WU W, LI J C, ZHAO J. Seismic response of adjacent filled parallel rock fractures with dissimilar properties[J], Journal of applied geophysics, 2013, 96: 33-37.

[62] LI J C, LI H B, JIAOY Y, et al. Analysis for oblique wave propagation across filled joints based on thin-layer interface model[J]. Journal of applied geophysics, 2014, 102: 39-46.

[63] CHAI S B, LI J C, ZHANG Q B, et al. Stress wave propagation across a rock mass with two non-parallel joints[J]. Rock mechanics and rock engineering, 2016, 49(10): 4023-4032.

[64] 柴少波, 李建春, 赵均海, 等. P 波在非线性交叉节理岩体中的传播特性研究[J]. 岩石力学于工程学报, 2019, 38(6): 1149-1157.
CHAI Shaobo, LI Jianchun, ZHAO Junhai, et al. Study on Stress P-wave propagation across intersecting rock joints with nonlinear deformation[J]. Chinese journal of rock mechanics and engineering, 2019, 38(6): 1149-1157(in Chinese).

[65] GOODMAN R E, TAYLOR R L, BREKKE T L. A model for the mechanics of jointed rock[J]. Journal of the soil mechanics and foundations division, 1968, 94(3): 637-659.

[66] SONG D, LIU X, HUANG J, et al. Characteristics of wave propagation through rock mass slopes with weak structural planes and their impacts on the seismic response characteristics of slopes: A case study in the middle reaches of Jinsha river[J]. Bullutin of engineering geology and the environment, 2021, 80: 1317-1334.

[67] DAI J, YANG J, YAO C, et al. Study on the mechanism of displacement mutation for jointed rock slopes during blasting excavation[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences, 2022, 150: 105032.

[68] CUNDALL P A. A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems[C]// Proceedings of Symposium of International Society of Rock Mechanics. Nancy, France: [s. n.], 1971: 11-18.

[69] CHEN S G, ZHAO J. A study of UDEC modelling for blast wave propagation in jointed rock masses[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences, 1998, 35(1): 93-99.

[70] ZHU J B, DENG X F, ZHAO X B, et al. A numerical study on wave transmission across multiple intersecting joint sets in rock masses with UDEC[J]. Rock mechanics and rock engineering, 2012, 46(6): 1429-1442.

[71] DENG X F, ZHU J B, CHEN S G, et al. Numerical study on tunnel damage subject to blast-induced shock wave in jointed rock masses[J]. Tunnelling and underground space technology, 2014, 43: 88-100.

[72] ZHU J B, LI Y S, WU S Y, et al. Decoupled explosion in an underground opening and dynamic responses of surrounding rock masses and structures and induced ground motions: A FEM-DEM numerical study[J]. Tunnelling and underground space technology, 2018, 82: 442-454.

[73] ZHU J B, LI Y S, PENG Q, et al. Stress wave propagation across jointed rock mass under dynamic extension and its effect on dynamic response and supporting of underground opening[J]. Tunnelling and underground space technology, 2021, 108: 103648.

[74] GU J, ZHAO Z Y. Considerations of the discontinuous deformation analysis on wave propagation problems[J]. International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, 2009, 33(12): 1449-1465.

[75] PENG X Y, YU P C, ZHANG Y B, et al. Applying modified discontinuous deformation analysis to assess the dynamic response of sites containing discontinuities[J]. Engineering geology, 2018, 246: 349-360.

[76] YANG Y T, XU D D, ZHENG H, et al. Modeling wave propagation in rock masses using the contact potential-based three-dimensional discontinuous deformation analysis method[J]. Rock mechanics and rock engineering, 2021, 54(5): 2465-2490.

[77] XU C Y, LIU Q S, WU J, et al. Numerical study on P-wave propagation across the jointed rock masses by the combined finite-discrete element method[J]. Computers and geotechnics, 2022, 142: 104554.

[78] DENG X F, ZHU J B, CHEN S G, et al. Some fundamental issues and verification of 3DEC in modeling wave propagation in joint rock mass[J]. Rock mechanics and rock engineering, 2012, 45: 943-951.

[79] HAGHNEJAD A, AHANGARI K, MOAREFVAND P, et al. Numerical investigation of the impact of rock mass properties on propagation of ground vibration[J]. Natural hazards, 2019, 96: 587-606.

[80] LI P, WU Y, CAI M. Failure behavior of the surrounding rock of jointed rock masses in a gold mine under blasting impact disturbance[J]. Environmental earth sciences, 2022, 81: 106.

[81] AMADEI B, GOODMAN R E. A 3-D constitutive relation for fractured rock masses[C]//Proceedings of the International Symposium on the Mechanical Behavior of Structured Media. Ottawa: [s. n.], 1981: 249-268.

[82] SCHOENBERG M. Reflection of elastic waves from periodically stratified media with interfacial slip[J]. Geophysical prospecting, 1983, 31(2): 265-292.

[83] DALEY P F, HRON F. Reflection and transmission coefficients for transversely isotropic media[J]. Bulletin of the seismological society of America, 1977, 67(3): 661-675.

[84] THOMSEN L. Weak elastic anisotropy[J]. Geophysics, 1986, 51(10): 1954-1966.

[85] COOK N G W. Natural joints in rock: Mechanical, hydraulic and seismic behaviour and properties under normal stress[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences & geomechanics abstracts, 1992, 29(3): 198-223.

[86] KOLSKY H. Stress waves in solids[M]. Oxford: Clarendon Press, 1953.

[87] CHAI S B, LI J C, RONG L F, et al. Theoretical study for induced seismic wave propagation across rock masses during underground exploitation[J]. Geomechanics and geophysics for geo-energy and geo-resources, 2017, 3(2): 95-105.

[88] LI J C, LI H B, ZHAO J. An improved equivalent viscoelastic medium method for wave propagation across layered rock masses[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences, 2015, 73: 62-69.

[89] FAN L F, MA G W, LI J C. Nonlinear viscoelastic medium equivalence for stress wave propagation in a jointed rock mass[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences, 2012, 50: 11-18.

[90] LI J C, LI N N, CHAI S B, et al. Analytical study of ground motion caused by seismic wave propagation across faulted rock masses[J]. International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, 2018, 42(1): 95-109.

[91] FAN L F, REN F, MA G W. Experimental study on viscoelastic behavior of sedimentary rock under dynamic loading[J]. Rock mechanics and rock engineering, 2011, 45(3): 433-438.

[92] ZHOU X F, FAN L F, WU Z J. Effects of microfracture on wave propagation through rock mass[J]. International journal of geomechanics, 2017, 17(9): 04017072.

[93] NIU L L, ZHU W C, LI S H, et al. Determining the viscosity coefficient for viscoelastic wave propagation in rock bars[J]. Rock mechanics and rock engineering, 2018, 51(5): 1347-1359.

[94] ICHIKAWA Y, KAWAMURA K, UESUGI K. Micro-and macrobehavior of granitic rock: observations and viscoelastic homogenization analysis[J]. Computer methods in applied mechanics & engineering, 2001, 191(1/2): 47-72.

[95] JOHNSTON D H, TOKSÖZ M N, TIMUR A. Attenuation of seismic waves in dry and saturated rocks: II. Mechanisms[J]. Geophysics, 1979, 44(4): 691-711.

[96] 刘建华,胥颐,郝天珧.地震波衰减的物理机制研究[J].地球物理学进展,2004(1):1-7.
LIU Jianhua, XU Yi, HAO Tianyao. Study on physical mechanism of the seismic wave attenuation[J]. Progress in geophysics, 2004(1): 1-7(in Chinese).

[97] NGUYEN S T, DORMIEU X. Propagation of micro-cracks in viscoelastic materials: analytical and numerical methods[J]. International journal of damage mechanics, 2015, 24(4): 562-581.

[98] REN F, FAN L, MA G. Simulation of viscoelastic behavior of defected rock by using numerical manifold method[J]. Frontiers of architecture and civil engineering in China, 2011, 5(2): 199-207.

[99] NIU L, ZHU W, LI S, et al. Spalling of a one-dimensional viscoelastic bar induced by stress wave propagation[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences, 2020, 131: 104317.

[100] FAN L F, REN F, MA G W. An extended displacement discontinuity method for analysis of stress wave propagation in viscoelastic rock mass[J]. Journal of rock mechanics and geotechnical engineering, 2011, 3(1): 73-81.

[101] 王昊,柴少波,蔚立元,等.平面P波在含结构面黏弹性岩体中的传播[J].岩体力学与工程学报,2020,39(增刊1):2763-2770.
WANG Hao, CHAI Shaobo, YU Liyuan, et al. P-wave propagation across a viscous-elastic rock mass with a structural plane[J]. Chinese journal of rock mechanics and engineering, 2020, 39(S1): 2763-2770(in Chinese).

[102] FAN L, WANG M, WU Z. A split three-characteristics method for stress wave propagation through a rock mass with double-scale discontinuities[J]. Rock mechanics and rock engineering, 2020, 53(6): 1-13.

[103] FAN L F, WANG M, WU Z J. Effect of nonlinear deformational macrojoint on stress wave propagation through a double-scale discontinuous rock mass[J]. Rock mechanics and rock engineering, 2020, 54(3): 1077-1090.

[104] 王礼立.应力波基础[M].北京:国防工业出版社,2005.

[105] FAN L F, WANG M, LI J C. Multiple pulses transmission through rock mass with double-scale discontinuities[J]. International journal of rock mechanics and mining sciences, 2021, 140(6): 104686.

(编辑 黄崇亚 李坤璐)